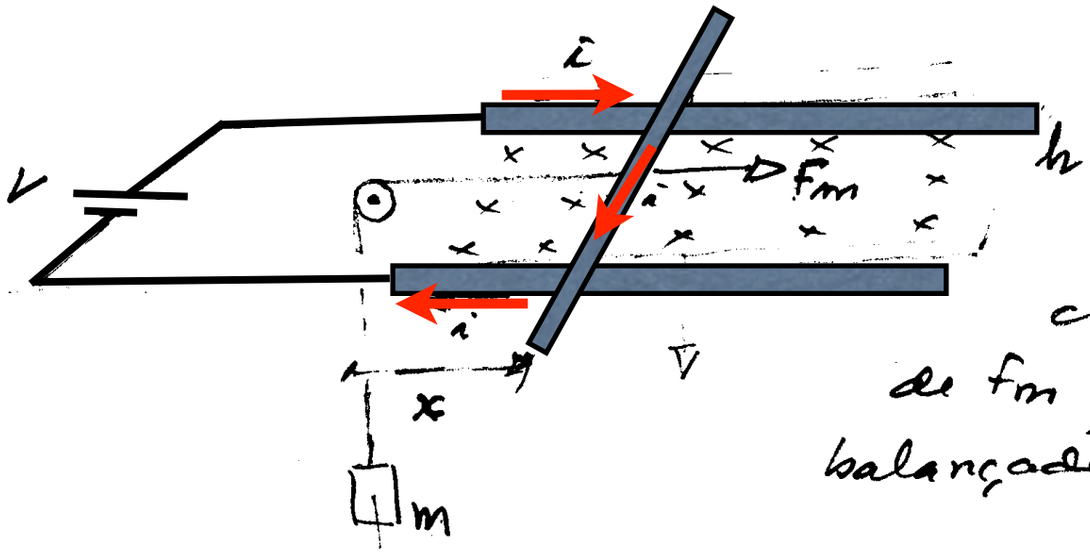
Exercício: Uma haste condutora desliza, sem atrito, com velocidade constante $v$ sobre dois trilhos condutores alimentados por uma bateria de voltagem $V$. A força magnética sobre a haste é contrabalançada por por uma massa $m$ pendurada em uma roldana ideal por um fio inextensível de massa desprezível. Calcule a potência fornecida pela bateria ao circuito.




A haste anda com velocidade cte $v$ na direção de $f_m$; $f_m$ é contrabalançado pelo peso $mg$.

força eletromotriz induzida $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} B h x = -Bhv$

$i_{ind}$ tem sentido oposto a $i = \frac{V}{R}$ = corrente gerada pela bateria.

$$I = i - i_{anal} = \frac{V}{R} - \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{V - Bhv}{R}$$

$$f_m = IhB = mg \Rightarrow \left(\frac{V - Bhv}{R}\right) hB = mg$$

$$\Rightarrow V - Bhv = \frac{Rmg}{hB} \Rightarrow Bhv = V - \frac{Rmg}{hB} \Rightarrow$$

$$v = \frac{V}{Bh} - \frac{Rmg}{(Bh)^2} = \frac{R}{Bh}\left(\frac{V}{R} - \frac{mg}{Bh}\right) //$$

Então,

$$I = \frac{V}{R} - \frac{Bh}{R}\frac{R}{Bh}\left(\frac{V}{R} - \frac{mg}{Bh}\right) = \frac{mg}{Bh} //$$

A potência fornecida pela bateria é $VI$: parte é usada para suspender a massa $m$ e parte é dissipada em calor.

$$\Delta E_p/\Delta t = mg\frac{\Delta h}{\Delta t} = mgv$$

Potência dissipada por efeito Joule $P = RI^2$

$$mgv + RI^2 = mg\frac{R}{Bh}\left(\frac{V}{R} - \frac{mg}{Bh}\right) + R\left(\frac{mg}{Bh}\right)^2$$

aumento de energia potencial gravitacional/tempo.

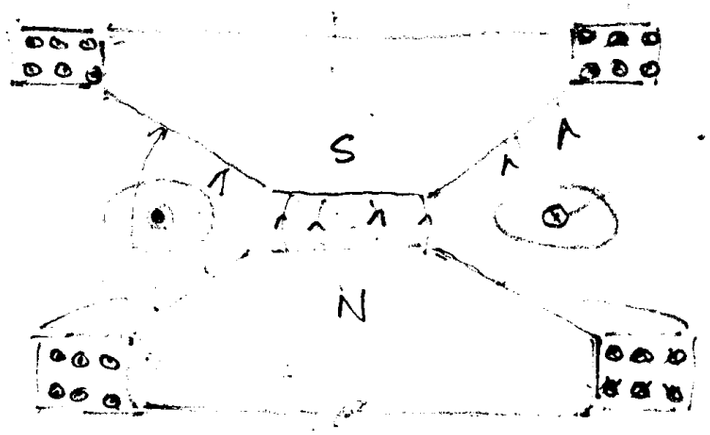
$$= \frac{mgR}{Bh}\frac{V}{R} = VI \checkmark$$

$VI = mgv + RI^2$ ✓ como esperado

Potência fornecida pela bateria

Potência dissipada por efeito Joule

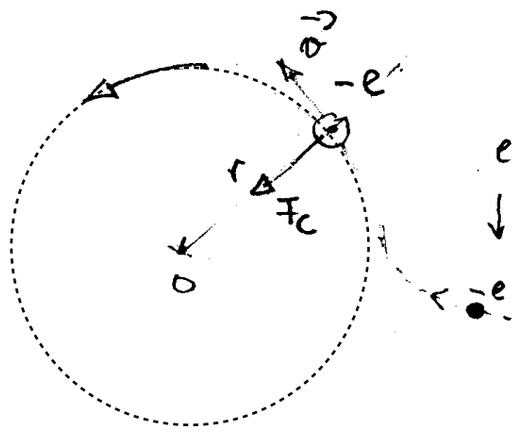
# Bétatron : acelerador de elétrons




. elétron orbita dentro do toróide em órbita circular

— bobinas

Vista de cima:




é injetado na região onde existe campo magnético. O campo varia no tempo. Não é uniforme espacialmente porém, apresenta simetria axial.

(O campo é + intenso na região central)

Sobre a órbita o campo é uniforme (simetria axial).

$$F_e = e v B_0 = \frac{m v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{m v}{e B_0} \quad \text{ou} \quad p = m v = e B_0 r$$

$B_0$ — valor de $B$ na órbita

$e$ — carga electrónica ($-$) de magnitude $e$

O campo $B$ não é homogéneo espacialmente: depende de $r$.

Valor médio de $B$ sobre uma área $S$ delimitada pelo raio da órbita $r$, pode ser definido por

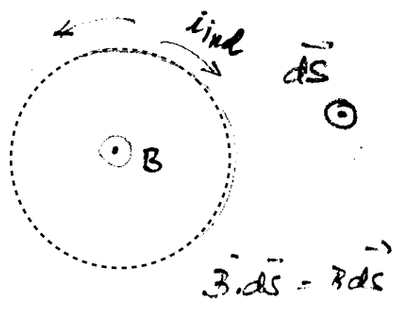
$$B_m = \frac{1}{\pi r^2} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$ — fluxo de $B(r)$ através da área $S$.

$$\Rightarrow \Phi_S = B_m \pi r^2$$

Sendo assim, se $B_m$ varia no tempo

$$\frac{d\Phi_S}{dt} = \frac{dB_m}{dt} \pi r^2$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_S}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB_m}{dt}$$




força eletromotriz ao longo da órbita de raio $r$.

Se $\frac{dB}{dt}$ for positivo a força eletromotriz (e portanto o campo elétrico) induzido estará no sentido horário

A força tangencial que atua no electrão

$\vec{F}_e = -e\vec{E}$ está na direção da velocidade eletrónica $v$ aumenta em módulo $\Rightarrow \vec{F}_c$ eletrónica aumenta.

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r}$$

intensidade do campo elétrico induzido

$$F_t = -eE = -e\frac{\mathcal{E}}{2\pi r} = -e\frac{\left(-\pi r^2\right)}{2\pi r}\frac{dB_m}{dt} = \frac{er}{2}\frac{dB_m}{dt}$$

força tangencial

$$F_t = \frac{dp}{dt} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{er}{2}\frac{dB_m}{dt} \qquad (1)$$

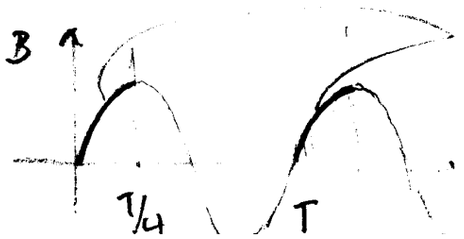
Por outro lado $p = mv = eB_0 r \Rightarrow \frac{dp}{dt} = e\frac{dB_0}{dt} r \qquad (2)$

$B(\rho, t) = B(\rho)\sin\omega t \qquad \frac{\partial B}{\partial t} = B(\rho)\cos\omega t\,\omega$

Comparando as expressões (1) e (2) vemos que é necessário que $B_0 = \frac{B_m}{2}$. O campo sobre a órbita deve ser metade do seu valor médio sobre a área delimitada pela órbita. As peças do Betatron devem ser cuidadosamente projetadas para garantir isto.

Para que os electrons sejam acelerados $\frac{dp}{dt} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{dB_0}{dt} > 0$

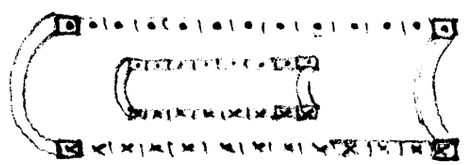



só vemos tracção é que $\frac{dB}{dt} > 0$.

Só $\frac{1}{4}$ de cada ciclo é aproveitado para aceleração dos elétrons. Somente o primeiro quarto de ciclo é utilizado para a operação. Os elétrons são injetados em $t=0$ e extraídos em $t=\frac{T}{4}$.

---

## Indutância mútua e auto-indutância.



Solenóide interno de raio $R_1$ com $N_1$ espiras de comprimento $\ell$
Solenóide externo de raio $R_2$ com $N_2$ espiras de comprimento $\ell$

Passando uma corrente $i_1$ estacionária no solenóide 1, é gerado um campo $B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{\ell} i_1$ na região interna do solenóide 1, i.e., para $r < R_1$ e $B_1 = 0$ para $r > R_1$.

O fluxo produzido pelo solenóide 1 sobre as $N_2$ espiras do solenóide 2 é dado por

$$\Phi_{2(1)} = N_2 \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = N_2 \underbrace{B_1(\pi R_1^2)}_{\text{só há campo para } r<R_1} = \mu_0 \frac{N_2 N_1}{\ell} i_1 (\pi R_1^2).$$

$$\boxed{\Phi_{21} = L_{21}\, i_1} \quad \text{onde} \quad L_{21} = \mu_0 \frac{N_2 N_1}{\ell}(\pi R_1^2) \;//$$

$L_{21}$ é denominado indutância mútua.

unidades: $\frac{\Phi}{i} = \frac{Wb}{A}$ ; $1\,\frac{Wb}{A} = 1$ Henry. (H)

Analogamente, se houver uma corrente $i_2$ passando pelo solenóide 2, haverá um campo

$$B_2 = \begin{cases} \mu_0 \dfrac{N_2}{\ell} i_2 & r < R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

O fluxo do campo $B_2$ sobre as $N_1$ espiras do solenóide 1 é dado por:

$$\Phi_{1(2)} = N_1 \int \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = N_1 B_2 (\pi R_1^2) = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} i_2 (\pi R_1^2)$$

$$\boxed{\Phi_{1(2)} = L_{12}\, i_2} \quad \text{onde} \quad \boxed{L_{12} = L_{21} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell}(\pi R_1^2).}$$

---

Além de produzirem fluxo magnético sobre o outro solenóide, há fluxo de campo sobre o próprio solenóide

$$\Phi_{1(1)} = N_1 \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = N_1 B_1 \pi R_1^2 = \mu_0 \frac{N_1^2}{\ell} \pi R_1^2 i_1$$

$$\Phi_{2(2)} = N_2 \int \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = N_2 B_2 \pi R_2^2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{\ell} \pi R_2^2 i_2$$

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_{11} i_1 = L_1 i_1 \quad \text{onde} \quad L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{\ell}(\pi R_1^2) \\ \Phi_2 = L_{22} i_2 = L_2 i_2 \quad \text{onde} \quad L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{\ell}(\pi R_2^2) \end{cases}$$

$L_1$ e $L_2$ são as auto-indutâncias dos solenóides 1 e 2 respectivamente.

---

(*) Note que $L_1, L_2, L_{21} = L_{12}$ só dependem de aspectos geométricos.

---

Se pelo solenóide 1 passa uma corrente $i_1$ e pelo solenóide 2 passa uma corrente $i_2$

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_1 i_1 + L_{12} i_2 \\ \Phi_2 = L_{21} i_1 + L_2 i_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & L_{12} \\ L_{21} & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

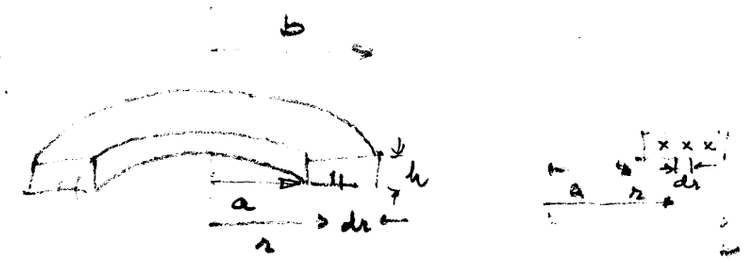
---

$$\begin{cases} \frac{d\Phi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \Rightarrow \mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - L_{12} \frac{di_2}{dt} \\ \frac{d\Phi_2}{dt} = L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \Rightarrow \mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_{21} \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

Obs: Há uma aproximação escondida aqui: isto só é aproximadamente correto se as variações da corrente são relativamente lentas numa escala de tempo comparada com o tempo que a luz leva para atravessar as dimensões típicas do circuito. ($t = \ell/c$) $c \simeq 3 \times 10^5 \text{ km/s} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

A f.e.m. auto-induzida $\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt}$ onde $i$ é a corrente que atravessa o circuito.

Exemplos: 1. Auto-indutância de um toróide.




$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} \qquad d\Phi = \vec{B}\cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} h\, dr\, N$$

$$d\Phi = \frac{\mu_0 N^2 i h}{2\pi}\frac{dr}{r} \Rightarrow \Phi = \int d\Phi = \int_a^b \frac{\mu_0 N^2 i h}{2\pi}\frac{dr}{r}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 i h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

---

Energia magnética

f.e.m. induzida $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$

Potência dissipada $P = \mathcal{E} i$

Potência fornecida para ter uma corrente $i$

$$P = -\mathcal{E} i = \frac{d\Phi}{dt} i = \frac{d}{dt}(Li)\, i = L\frac{di}{dt} i$$

A energia total fornecida para fazer passar essa corrente desde o instante original $t=0$ onde $i=0$ até o instante $t$ onde a corrente é $I$ é dada por

$$U = \int_0 P\,dt = \int_0 Li\frac{di}{dt}\,dt = \int_0 Li\,di = \frac{Li^2}{2}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2} L i^2}$$

Vejamos o caso de um solenóide com $N$ espiras $\Rightarrow n = \frac{N}{\ell}$

$B = \mu_0 n i \Rightarrow L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S$ onde $S$ é a área de secção reta do solenóide $\Rightarrow U = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N^2}{\ell} S i^2$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}\left(\mu_0 \frac{N}{\ell} i\right)^2 \frac{\ell S}{\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 V$$

$V$ volume do solenóide $= S\ell$

$\Rightarrow$ Densidade volumétrica de energia $u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2\mu_0} B^2$

Este resultado é geral: onde existe um campo magnético $\vec{B}$ existe uma densidade de energia $\boxed{u_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2}$

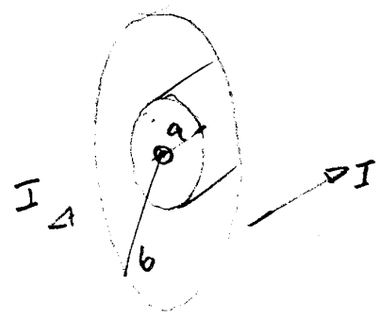
Semelhante ao caso eléctrico $\boxed{u_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2}$

No caso em que existe tanto $\vec{B}$ quanto $\vec{E}$ em uma dada região do espaço $\Rightarrow$ existe naquela região uma densidade de energia electromagnética dada por

$$\boxed{u_{em} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}}$$

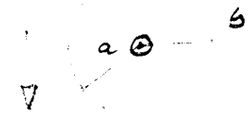
Isto propicia uma forma geral para obter a autoindutância de um circuito.

Exemplo: Cabo coaxial formado por uma casca cilíndrica de raio b e espessura desprezível e um condutor cilíndrico de raio a. A densidade de corrente que flui no condutor interno é uniforme e tem sentido oposto ao de que flui na casca externa. Vista de frente:




1. Campo $\vec{B} = 0$ para $r > b$

2. Campo $\vec{B}$ tem direção tangencial e módulo $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ $a < r < b$




3. Campo $\vec{B}$ tem direção tangencial e módulo $B = \mu_0 j \frac{r}{2}$ onde $j = \frac{I}{\pi a^2}$ para $r < a$ (este resultado decorre da lei de Ampère: $\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$; para $r < a$ $\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 i$; a corrente que atravessa a área delimitada pelo circuito Amperiano é $i = j\pi r^2$ onde $j = \frac{I}{\pi a^2}$)

(*) Note que só existe campo magnético na região $r < b$.

A densidade de energia

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \begin{cases} \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 j r}{2}\right)^2 & r < a \\ \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 & a < r < b \end{cases}$$

Para calcular a energia armazenada em todo o espaço devemos calcular $U = \int u_m \, dV$

$dV = r\,d\theta\,dr\,\ell$ onde $\ell$ é o comprimento do cabo.

elemento de volume em coordenadas cilíndricas

$$U = \int_0^a u_m \, dV + \int_a^b u_m \, dV = \frac{1}{2\mu_0}\int_0^a \left(\frac{\mu_0 j r}{2}\right)^2 r\,d\theta\,dr\,\ell + \frac{1}{2\mu_0}\int_a^b \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 r\,d\theta\,dr\,\ell$$

A integral em $d\theta$ pode ser feita trivialmente pois o integrando não depende de $\theta$ $\Rightarrow$

$$U = \frac{1}{2\mu_0} 2\pi\ell \int_0^a \left(\frac{\mu_0 j r}{2}\right)^2 r\,dr + \frac{1}{2\mu_0} 2\pi\ell \int_a^b \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 r\,dr$$

$$U = \frac{\pi \ell}{\mu_0} \frac{\mu_0^2 j^2}{4} \underbrace{\int_0^a r^3 dr}_{\frac{a^4}{4}} + \frac{\pi \ell}{\mu_0} \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2} \underbrace{\int_a^b \frac{1}{r} dr}_{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$U = \frac{\pi \ell \mu_0 j^2 a^4}{16} + \frac{\ell}{4\pi} \mu_0 I^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$j = I / \pi a^2 \Rightarrow j^2 a^4 = \frac{I^2 a^4}{\pi^2 a^4} \Rightarrow$$

$$U = \frac{\pi \ell \mu_0}{16} \frac{I^2}{\pi^2} + \frac{\ell}{4\pi} \mu_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right) I^2$$

$$U = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mu_0 \ell}{8\pi} + \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right\} I^2$$

$L$ = indutância do cabo coaxial

A indutância / unidade de comprimento

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

/ contribuição parcial ao condutor interno